Modelleren

Deel 1: Beweging van een voorwerp
Deel 2: Afkoeling van een voorwerp
Deel 3: Radioactief verval

Deel 1: Beweging van een voorwerp

<u>Inleiding</u>
In de natuurkunde kennen we de volgende formules:

$a_{gem} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ en $v_{gem} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Deze formules kunnen we herschrijven tot:

$\Delta v = a_{gem} \cdot \Delta t$ en $\Delta s = v_{gem} \cdot \Delta t$

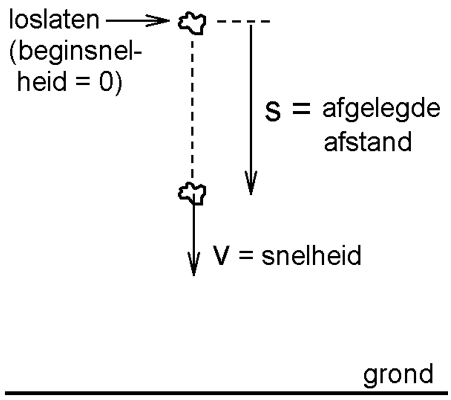
Als de tijdstapjes (Δt) heel erg klein zijn, zullen de versnelling en de snelheid binnen elk tijdstapje maar weinig veranderen. We kunnen a_{gem} dan vervangen door a en v_{gem} door v. Als we bovendien het deltasymbool door een simpele d vervangen, krijgen wij:

$dv = a \cdot dt$ en $ds = v \cdot dt$

Hierin stellen dv en ds de toename van de snelheid en van de afgelegde afstand binnen een tijdstapje voor.

In het volgende gebruiken we het programma Coach om onze natuurkundige problemen numeriek op te lossen. Het programma noemt dit ‘modelleren’.

<u>Voorbeeld 1: vallen zonder luchtwrijving</u>
Als je een voorwerp boven de grond loslaat, valt het met de valversnelling naar beneden. Zie de figuur hiernaast.



In Coach kun je dit als volgt modelleren.

Modelregels	Startwaarden
v = v + a*dt	a = 9,81 ‘m/s^2
s = s + v*dt	dt = 0,01 ‘s
t = t + dt	v = 0 ‘m/s
als t > tmax dan stop eindals	s = 0 ‘m
	t = 0 ‘s
	tmax = 5 ‘s

De kolom met startwaarden wordt als eerste eenmalig ingelezen. Alles na de apostrof (‘) wordt niet gelezen en dient alleen als commentaar. Daarna worden de modelregels vele keren van boven naar beneden afgewerkt. Het programma stopt pas als aan de voorwaarde in de laatste modelregel is voldaan.

Over de modelregels kunnen we het volgende opmerken.

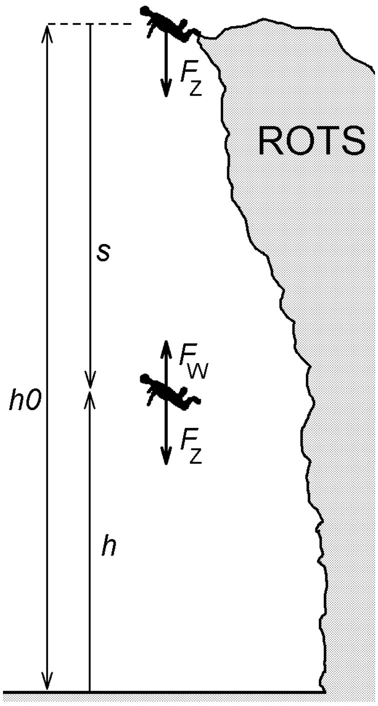
- De modelregel v = v + a*dt moet je als volgt opvatten. De snelheid aan het eind van het tijdstapje wordt gelijk aan de snelheid aan het begin van het tijdstapje plus de toename van de snelheid (= a*dt).
- De modelregel s = s + v*dt moet je als volgt opvatten. De afgelegde afstand aan het eind van het tijdstapje wordt gelijk aan de afgelegde afstand aan het begin van het tijdstapje plus de toename van de afgelegde afstand (= v*dt).
- De modelregel die begint met v staat boven de modelregel die begint met s. Dit is logisch, want de nieuwe v moet bekend zijn bij de berekening van de nieuwe s.
- Het programma stopt als de tijd groter wordt dan een vooraf ingestelde tijd tmax.

In de modelregels komen alleen maar letters voor. Dit vergroot de leesbaarheid van het model: je herkent namelijk meteen de formules. Als je bijvoorbeeld een andere planeet (deze bepaalt a) of een andere tijdstap (dt) neemt, hoef je alleen maar startwaarden te veranderen. Overigens is de keuze van de tijdstap dt belangrijk. Een te grote tijdstap leidt tot onnauwkeurige resultaten. Een te kleine tijdstap leidt tot onnodig veel rekenwerk voor de computer.

Opdracht 1
Voer het bovenstaande model van het vallende voorwerp zonder luchtwrijving in. Maak twee diagrammen: een v-t-diagram en een s-t-diagram. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht (zie achteraan).

In de controlefiguur is het toepassingsvenster (met de blauwachtige achtergrond) in één van de vier vakken ondergebracht. Dit is mogelijk door dit venster naar het vak te slepen en gelijktijdig de shift-toets ingedrukt te houden.

Voorbeeld 2: van een rots afspringen



In de figuur hiernaast spring je van een rots af. Je snelheid wordt steeds groter. Toch neemt je snelheid steeds minder snel toe vanwege de luchtwrijving. Als je in je model met deze luchtwrijving rekening wilt houden, moet je het voorgaande model uitbreiden. De versnelling a is dan niet meer simpelweg 9,81 m/s^2, maar volgt dan uit de tweede wet van newton. De benodigde formule is:

$$a = \frac{F_R}{m}.$$

Hierin is F_R de resulterende kracht die je ondervindt en m je massa. De resulterende kracht is opgebouwd uit twee krachten, namelijk de zwaartekracht F_Z en de wrijvingskracht F_W.
Omdat de zwaartekracht in de richting van de beweging wijst, stellen we die positief. Hiervoor geldt dus:
$F_Z = m*g$.
De wrijvingskracht neemt kwadratisch toe met de snelheid. Omdat de wrijvingskracht tegen de beweging in wijst, stellen we die negatief. We krijgen dan:
$F_W = -k*v^2$.
Hierin is k de wrijvingscoëfficiënt.
Voor de resulterende kracht krijgen we dan:
$F_R = F_Z + F_W$.

In het volgende model heb je een massa van 80 kg en een wrijvingscoëfficiënt van 0,30 Ns^{2}m^{-2}. Het model in Coach wordt dan:

Modelregels	Startwaarden
Fw = - k * v^2	m = 80 ‘kg
Fres = Fz + Fw	g = 9,81 ‘m/s^2
a = Fres / m	Fz = m * g
v = v + a*dt	k = 0,30 ‘N/(m/s)^2
s = s + v*dt	dt = 0,01 ‘s
t = t + dt	v = 0 ‘m/s
als t > tmax dan stop eindals	s = 0 ‘m
	t = 0 ‘s
	tmax = 15 ‘s

Opdracht 2a
Voer het model in Coach in. Maak weer een v-t-diagram en een s-t-diagram. Verhoog zo nodig het maximum aantal iteraties (onder ‘opties’ en daarna ‘instellingen’).Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

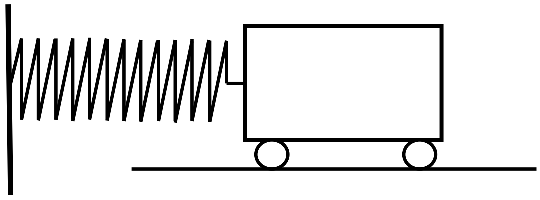
Als je van een rots af springt, is de hoogte boven de grond een belangrijke grootheid. In het begin is je hoogte maximaal. In ons voorbeeld spring je van een hoogte van 500 m. Bij het neerkomen is je hoogte nul geworden. Kleiner dan nul kan de hoogte natuurlijk niet worden. In de volgende opdracht ga je je model uitbreiden met de hoogte boven de grond.

Opdracht 2b
Breid je model uit met de variabele h van hoogte en met de starthoogte h0 (zie de bovenstaande figuur waarin h en h0 aangegeven zijn). Laat Coach met rekenen stoppen als h nul is geworden. Gebruik hierbij het 'als….dan stop endals' commando. Zet het h-t-diagram in het nog niet gebruikte venster. Ga na of je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

Natuurlijk heb je bij het afspringen een parachute bij je en trek je die op tijd open. De wrijvingscoëfficiënt neemt in korte tijd sterk toe.

Opdracht 2c
Breid je model zo uit dat de wrijvingscoëfficiënt tussen 200 m en 100 m lineair toeneemt van 0,30 Ns^2m^{-2} naar 30 Ns^2m^{-2} Onder de 100 m blijft de wrijvingscoëfficiënt 30 Ns^2m^{-2}.
In het overgangsgebied geldt dan $k = 59{,}7 - 0{,}297 \cdot h$. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

<u>Voorbeeld 3: karretje voert trilling uit</u>



In de figuur hiernaast is een karretje met massa m via een spiraalveer met veerconstante C aan een muur bevestigd. Het karretje wordt vanuit de evenwichtsstand naar rechts getrokken en vanuit stilstand losgelaten. Vervolgens gaat het karretje heen en weer bewegen.

De uitwijking u van het karretje wordt per definitie gerekend ten opzichte van zijn evenwichtsstand. We nemen naar rechts positief en naar links negatief. Deze keuze heeft ook gevolgen voor het teken van de snelheid v van het karretje. Als het karretje naar rechts beweegt, is v positief. Als het karretje naar links beweegt, is v negatief.

Als de veer is ingedrukt, wijst de veerkracht Fv op het karretje naar rechts. Anders gezegd: als u negatief is, is Fv positief. Omgekeerd geldt ook dat als u positief is (veer is uitgerekt), Fv negatief is. Ga nu na dat de veerkracht met de volgende modelregel berekend kan worden.
Fv = - C*u.

Ten gevolge van de luchtwrijving komt het karretje uiteindelijk tot stilstand. Voor de grootte van de wrijvingskracht geldt: Fw = $k*v^2$. Als het karretje naar rechts beweegt, wijst de wrijvingskracht naar links en als het karretje naar links beweegt, wijst de wrijvingskracht naar rechts. Ga nu na dat de wrijvingskracht met de volgende modelregels berekend kan worden.
Als v > 0 dan Fw = -k*v^2 eindals
Als v < 0 dan Fw = +k*v^2 eindals
Als v = 0 dan Fw = 0 eindals
De laatste twee regels kunnen worden samengevoegd tot:
Als v <= 0 dan Fw = +k*v^2 eindals.

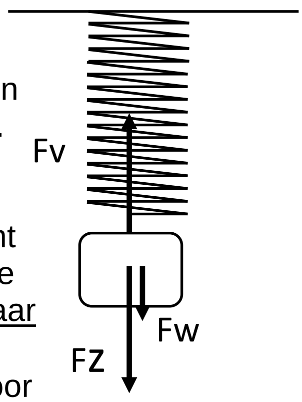
In het volgende model is m gelijk aan 0,160 kg, C gelijk aan 0,65 N/m (het is dus een zeer slappe veer), k gelijk aan 0,20 $N(m/s)^2$ en de beginwaarde van u gelijk aan 0,10 m. Het model in Coach wordt dan:

Modelregels	Startwaarden
Fv = …………	m =……… ‘kg
Als ……..	C = ……… ‘N/m
Als ……..	k = ……… ‘N/(m/s)^2
Fres = Fv + Fw	u = 0,10 ‘m
a = ………	v = ……… ‘m/s
v = ………	t = 0 ‘s
u = ………	dt = 0,10 ‘s
t = t + dt	tmax = 15 ‘s
als t > tmax dan stop eindals	

Opdracht 3
Vul in het bovenstaande model de openstaande plekken in. Maak een diagram waarin de uitwijking tegen de tijd uitstaat. *Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.*

Voorbeeld 4: massa-veer-systeem met wrijving

In de figuur hiernaast is een massa-veer-systeem afgebeeld. Als je het blokje (de ‘massa’) vanuit de evenwichtsstand naar beneden trekt en deze vervolgens loslaat, gaat het blokje op en neer bewegen. We gaan van deze trilling een model opstellen.



Er zijn drie krachten die op het blokje werken, namelijk de zwaartekracht Fz, de veerkracht Fv en de (lucht)wrijvingskracht Fw. Voor het teken van deze krachten is het belangrijk om af te spreken welke richting positief is. Hierna nemen we aan dat naar boven positief is.

- De zwaartekracht is steeds naar beneden gericht en hiervoor geldt dus de formule: Fz = -m*g.
- De veerkracht is steeds naar boven gericht omdat de veer uitgerekt is (behalve bij zeer grote uitwijkingen). We nemen Fv dus positief en de formule is: Fv = C*(l−lo). Hierbij is l de veerlengte en lo de veerlengte in onbelaste toestand (dus als er geen blokje aan de veer hangt). De veerconstante C geeft aan hoe stug de veer is.
- De wrijvingskracht Fw is steeds tegengesteld gericht aan de bewegingsrichting van de veer. Bij een beweging naar beneden geldt dus Fw = $+k*v^2$ en bij een beweging naar boven geldt dus Fw = $-k*v^2$ Hierin is v de snelheid van het blokje en k de wrijvingscoëfficiënt.

Naast de onbelaste veerlengte lo introduceren we de evenwichtslengte le. Dit is de veerlengte waarbij het blokje in rust aan de veer hangt. In die situatie geldt Fv = Fz. Met de bovenstaande formules wordt dit: C*(le-lo)=m*g. Voor le geldt dan dus:
le = lo + m*g/C.
Als we hierna de op- en neergaande beweging van het blokje modelleren, staat deze uitdrukking voor le in de rechter kolom (startwaarden), omdat dit maar eenmalig hoeft te worden uitgerekend.

In de volgende model vormen de vergelijkingen ‘a = Fres / m’, ‘v = v + a*dt’ en ‘h = h + v*dt’ het hart van het model. Hierbij is h de hoogte van het blokje ten opzichte van de evenwichtsstand van het blokje. De veerlengte l, die bij elke tijdstap nodig is om de veerkracht uit te rekenen, volgt uit h en le volgens:
l = le – h.

Opdracht 4

De massa van het blokje is 60 gram. De veer heeft in onbelaste toestand een lengte van 20 cm en een veerconstante van 5 N/m. De wrijvingscoëfficiënt bedraagt 0,030 N/(m/s)^2. Vanuit de evenwichtsstand wordt het blokje 20 cm naar beneden getrokken en losgelaten. Vul de open plekken van het volgende model in.
Zet het model daarna in Coach. Laat Coach drie diagrammen tekenen namelijk een h-t-diagram, een l-t-diagram en een F-t-diagram. In het laatste diagram moeten alle drie de krachten op het blokje (Fz, Fv en Fw) tegen de tijd uitgezet worden. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

Modelregels	Startwaarden
l = le – h	m = …………... ‘kg
Fv = ………….	g = 9,81 ‘m/s^2
Als v > 0 dan Fw = …...…………………… eindals	C = ………….. ‘N/m
Als v < 0 dan Fw = ……………………… eindals	lo = …………....‘m
Als v = 0 dan Fw = ……………………… eindals	k = …………..... ‘N/(m/s)^2
Fres = Fz + Fv + Fw	Fz = -m*g ‘N
a = Fres / m	le = lo + m*g/C ‘m
v = v + a*dt	h = -0,20 ‘m
h = h + v*dt	v = ………. ‘m/s
t = t + dt	t = 0 ‘s
als t > tmax dan stop eindals	dt = 0,001 ‘s
	tmax = 4 ‘s

Nabeschouwing en voorbeschouwing

De voorbeelden tot nu toe gingen steeds over een voorwerp (of een mens) dat een eendimensionale beweging maakt en dit voorwerp dus slechts één plaatscoördinaat heeft. Deze plaatscoördinaat was s bij het vallende voorwerp, u bij het karretje dat via een veer aan de muur verbonden was en h bij het blokje dat aan een veer hing. Het kloppende hart van de modellen tot nu werd gevormd door de volgende modelregels.

1) Fres = ← het rechter lid verschilt van geval tot geval
2) a = Fres / m
3) v = v + a*dt
4) s = s + v*dt of u = u + v*dt of h = h + v*dt
5) t = t + dt

In voorbeeld 1 waren de eerste twee modelregels niet nodig omdat bij een vrije val a gelijk is aan 9,8 m/s^2 en de regel "a = 9,8" bij de startwaarden stond. Bij de modellen van voorbeeld 2 en verder waren modelregel 1 en 2 wel nodig. Hierbij werd in regel 1 de resulterende kracht Fres bepaald en in regel 2 de versnelling a berekend. Tenslotte werden de nieuwe waarden van de snelheid v (in regel 3), de plaats s of u of h (in regel 4) en de tijd t (in regel 5) berekend. *Belangrijk is om te beseffen dat in principe alleen de berekening van Fres van geval tot geval verschillend is.*

De voorbeelden die hierna komen gaan over tweedimensionale bewegingen van een voorwerp. Er zijn dan twéé plaatscoördinaten van een bewegend voorwerp namelijk de x- en de y-coördinaat. Het kloppende hart van de modellen heeft dan de volgende gedaante.

1) Fresx = ← het rechter lid verschilt van geval tot geval
2) ax = Fresx / m
3) vx = vx + ax*dt
4) x = x + vx*dt

5) Fresy = ← het rechter lid verschilt van geval tot geval
6) ay = Fresy / m
7) vy = vy + ay*dt
8) y = y + vy*dt

9) t = t + dt

De modelregels 1 tot en met 4 horen bij de x-richting en de modelregels 5 tot en met 8 horen bij de y-richting. Beide groepjes modelregels lijken sprekend op het kloppende hart van het eendimensionale geval. Zoals we zullen zien, zijn de modelregels 1, 2 en 3 bij het eerst volgende voorbeeld (horizontale worp zonder luchtwrijving) niet nodig omdat vx een constante waarde heeft.

Bij elk model (zowel bij eendimensionale als tweedimensionale bewegingen) moet duidelijk worden afgesproken wat de positieve richting van de plaatsas of plaatsassen is.

Voorbeeld 5: beweging van een bal door de lucht zonder luchtwrijving

Je werpt een bal in horizontale richting weg. Door de zwaartekracht gaat de bal naar beneden bewegen. Als we geen rekening met luchtwrijving houden, is de beweging van de bal in horizontale richting eenparig en in verticale richting eenparig versneld.

De plaats van de bal wordt weergegeven door de coördinaten x en y.
De snelheid van de bal wordt weergegeven door de snelheidscomponenten vx en vy.
De versnelling van de bal wordt weergegeven door de versnellingscomponenten ax en ay.

Bij het maken van het model spreken we het volgende af.

- De oorsprong van de plaats (x = 0 en y = 0) bevindt zich op de grond recht onder het vertrekpunt van de bal.
- De positieve richting van de X-as is naar rechts gericht.
- De positieve richting van de Y-as is naar boven gericht. De snelheidscomponent vy is dus positief als de bal stijgt en negatief als de bal daalt.

Als we de bal met een massa van 60 gram op 1,5 m hoogte met een snelheid van 4 m/s horizontaal naar rechts gooien, is de beweging met het volgende model te berekenen.

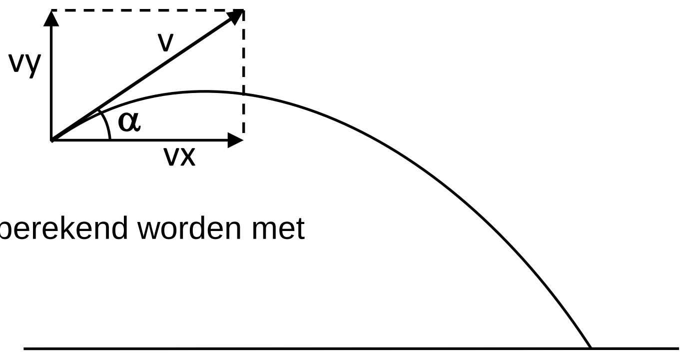
Modelregels	Startwaarden
x = x + vx*dt	m = 0,060 ‘kg
Fresy = Fz	g = 9,81 ‘m/s^2
ay = Fresy / m	Fz = -m * g ‘N
vy = vy + ay*dt	x = 0 ‘m
y = y + vy*dt	y = 1,5 ‘m
t = t + dt	vx = 4 ‘m/s
als y < 0 dan stop eindals	vy = 0 ‘m/s
	t = 0 ‘s
	dt = 0,01 ‘s

We kunnen het volgende over het model opmerken.

- In de eerdere modellen kwam de afgelegde afstand s voor. Voor deze s zijn nu x en y in de plaats gekomen. Op dezelfde manier is de snelheid v vervangen door vx en vy. Ook is de versnelling a door ay vervangen. In toekomstige modellen, waarbij luchtwrijving wordt meegenomen, speelt ook de versnelling in de x-richting (ax) een rol.
- De eerste modelregel heeft betrekking op de x-richting (eenparige beweging). De volgende vier modelregels hebben betrekking op de y-richting (eenparig versnelde beweging).
- De zwaartekracht Fz wordt in het model maar één keer uitgerekend (in de rechter kolom). Deze zwaartekracht werkt in de negatieve richting van de y-as en is daarom negatief.

Opdracht 5a
Voer het bovenstaande model in Coach in. Maak een y-x-diagram. Stel het diagram zodanig in dat de x-as en y-as dezelfde verhouding hebben. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

Als je de bal niet horizontaal maar onder een hoek α wegwerpt, krijg je een situatie zoals hiernaast is afgebeeld. Als de beginsnelheid van de bal v is, kunnen de startwaarden van beide snelheidscomponenten (vx en vy) berekend worden met
vx = v * cos(α)
vy = v * sin(α).

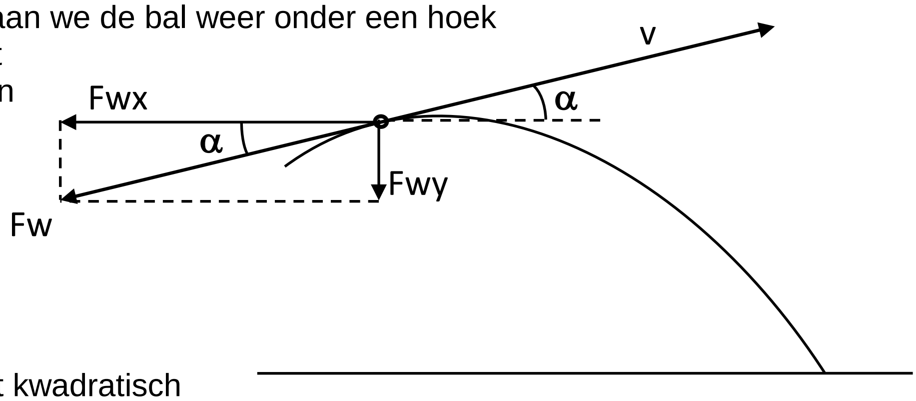


De beweging van de bal na een schuine worp is in principe gelijk aan die na een horizontale worp. In horizontale richting is er namelijk nog steeds sprake van een eenparige beweging en in verticale richting is de beweging (van begin tot eind) nog steeds een eenparig versnelde beweging. De modelregels hoeven dus niet te worden aangepast.

Opdracht 5b
Breid het vorige model uit voor schuine worpen. In de rechter kolom (startwaarden) moeten de beginsnelheid en de starthoek ingevuld worden. Gebruik hiervoor de symbolen v en alfa. Kies als beginwaarden v = 5 m/s en alfa = 30^o. Maak twee diagrammen namelijk een y-x-diagram en een vy-t-diagram. Tip: stel Coach in op graden en dus niet op radialen. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

Voorbeeld 6: beweging van een bal door de lucht met luchtwrijving

In het volgende model gaan we de bal weer onder een hoek wegwerpen. Nieuw is dat we rekening gaan houden met luchtwrijving van de bal. De luchtwrijving Fw wijst steeds tegengesteld aan de snelheid v. Zie de figuur hiernaast.



De wrijvingskracht neemt kwadratisch toe met de snelheid. Voor de grootte van Fw geldt dan:
Fw = k * v^2.
Hierin is k de wrijvingscoëfficiënt.
De componenten Fwx en Fwy in het model volgen hieruit volgens
Fwx = -Fw * cos(α)
Fwy = -Fw * sin(α).
De mintekens komen voort uit het feit dat Fwx en Fwy in de getekende situatie in de negatieve richting wijzen. Omdat hoek α in het model niet steeds opnieuw wordt berekend, zijn de volgende modelregels geschikter.
Fwx = -Fw * (vx / v)
Fwy = -Fw * (vy / v).
Let op dat de formules Fwx = - k * vx^2 en Fwy = - k * vy^2 FOUTIEF zijn!!!

Opdracht 6
Het onderstaande model beschrijft de beweging van een badmintonshuttle nadat deze schuin is weggeschoten. De beginsnelheid is 20 m/s en de starthoek is 15^o.(zie de rechter kolom). Vul de open plekken van het model aan. Voer het model vervolgens in Coach. Maak drie diagrammen namelijk een y-x-diagram, een vx-t-diagram en een vy-t-diagram. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

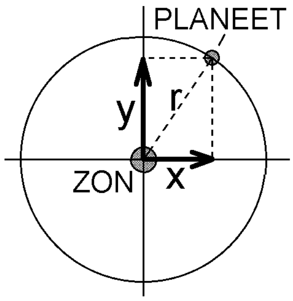
Modelregels	Startwaarden
v = sqrt(vx^2 + vy^2)	m = 0,0050 ‘kg
……………..	g = 9,81 ‘m/s^2
Fwx =……………..	Fz = -m * g ‘N
Fresx =……………..	x = 0 ‘m
ax = Fresx / m	y = 1,5 ‘m
vx = vx + ax*dt	v = 20 ‘m/s
x = x + vx*dt	alfa = 15 ‘^{o}
Fwy =……………..	k = 0,003 ‘N/(m/s)^2
Fresy =……………..	vx =……………..
ay = Fresy / m	vy =……………..
vy = vy + ay*dt	t = 0 ‘s
y = y + vy*dt	dt = 0,001 ‘s
t = t + dt	
als y < 0 dan stop eindals	

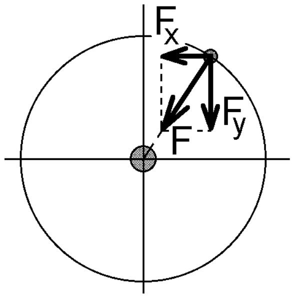
Voorbeeld 7: planeet om de zon

Binnen ons zonnestelsel draaien planeten en kleinere stukken materie (planetoïden) rond de zon. Hierna worden al deze objecten kortweg met planeten aangeduid. De gravitatiekracht F op de planeet door de zon is de oorzaak van de richtingsverandering van de snelheid van de planeet. Deze kracht wijst steeds naar het middelpunt van de zon en is in grootte gelijk aan:

$$F = G\frac{m_{ZON}m}{r^2}$$

Hierin is G de gravitatieconstante ($6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}), m_{ZON} de massa van de zon ($1{,}99\cdot10^{30}$ kg), m de massa van de planeet en r de afstand tussen het middelpunt van de zon en van de planeet.





In het nu volgende wordt de beweging van de planeet gemodelleerd. In het model worden binnen elke tijdstap de nieuwe x- en y-coördinaat van de planeet berekend. Zoals in de bovenste figuur hiernaast is afgebeeld, bevindt de oorsprong van het assenstelsel (x=0 en y=0) zich in het middelpunt van de zon. De positieve richting van de x-as wijst naar rechts en de positieve richting van de y-as wijst naar boven. In de onderste figuur zijn de twee componenten Fx en Fy van kracht F op de planeet getekend. De twee driehoeken in de bovenste figuur zijn gelijkvormig met de overeenkomstige driehoeken in de onderste figuur. Hieruit volgt dat voor de componenten Fx en Fy geldt:

$$F_X = -F\cdot\frac{x}{r} \quad \text{en} \quad F_Y = -F\cdot\frac{y}{r}.$$

De mintekens geven aan dat de krachtcomponenten in de negatieve richtingen wijzen. Bij negatieve waarden van x en y (dus als de planeet zich in het derde kwadrant bevindt), wijzen Fx en Fy in de positieve richting en volgen uit de formules ook positieve waarden van Fx en Fy. Ga dat na!

In het volgende model wordt de planeetbeweging berekend.
Bij de startwaarden worden drie grootheden gebruikt die niet perse nodig zijn, namelijk ma (= massa van de aarde), ra (= straal van de baan van de aarde) en va (baansnelheid van de aarde). Door de startwaarden van m (= massa planeet), x en y (coördinaten van de planeet) en vx en vy (snelheidscomponenten van de planeet) uit te drukken in ma, ra en va, wordt het variëren van deze startwaarden makkelijk en overzichtelijk.
De laatste modelregels berekenen trelatief, xrelatief en yrelatief. Deze grootheden zijn dimensieloos en geven aan hoeveel keer t, x en y groter zijn dan de omlooptijd van de aarde en de straal van de aardbaan. Deze trelatief, xrelatief en yrelatief maken het aflezen van diagrammen handig.

Opdracht 7
*Vul in het onderstaande model de open plekken in. Voer het model vervolgens in Coach. Maak twee diagrammen, namelijk een yrelatief-xrelatief-diagram en een xrelatief-trelatief-diagram. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht. Ga na of de baan van de satelliet afhangt van de massa m van de satelliet. Ga ook na wat het verband is tussen de baansnelheid en de baanstraal bij cirkelvormige bewegingen. Halveer bijvoorbeeld de beginwaarde van de baansnelheid (regel vx = 1,0*va wordt vx = 0,5*va) en ga na hoeveel keer de afstand van de satelliet tot de zon groter moet worden om een cirkelbaan te behouden.*

model	Startwaarden
r = sqrt(x^2 + y^2)	G = 6,67*10^-11 ‘gravitatieconstante
F = G*mz*m/(r^2)	mz = 1,99*10^30 ‘massa zon in kg
t = t + dt	ma = 5,97*10^24 ‘massa aarde in kg
	ra = 1,50*10^11 ‘afstand zon tot aarde in m
Fx = ………	va = 29783 ‘baansnelheid aarde in m/s
ax = ………	
vx = ……….	m = 1,0*ma
x = …………	x = 0,0*ra
	y = 1,0*ra
Fy = ………..	vx = 1,0*va
ay = ………	vy = 0,0*va
vy = ………..	
y = …………	t = 0
	dt = 24*3600
trelatief = t / (365*24*3600)	
xrelatief = x / ra	
yrelatief = y / ra	
Als trelatief > 10 dan stop eindals	

Deel 2: Afkoeling van een voorwerp

Een warm of heet voorwerp verliest warmte aan zijn omgeving door geleiding, stroming en straling. In de volgende tekst kijken we steeds naar de warmte-effecten die gedurende een klein tijdstapje Δt plaats vinden. Stel dat het voorwerp in zo'n tijdstapje een hoeveelheid warmte ΔQ aan de omgeving afstaat. Met de warmtecapaciteit C (geschreven met hoofdletter) van het voorwerp kunnen we dan de temperatuurdaling ΔT berekenen volgens:

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{C}.$$

Als het voorwerp homogeen is, kan C eenvoudig berekend worden met:

$$C = c \cdot \rho \cdot V$$

Hierin is V het volume van het voorwerp. Verder is c (kleine letter) de soortelijke warmte en ρ de dichtheid van de stof waar het voorwerp uit bestaat.

De warmteafgifte ΔQ binnen tijdstapje Δt kunnen we als volgt uitrekenen.

$$\Delta Q = P \cdot \Delta t.$$

In deze formule is P het 'vermogen' van de warmteafgifte. Dit is de warmte die per tijdseenheid door het blokje aan de omgeving wordt afgestaan. Het vermogen wordt voor een deel veroorzaakt door geleiding en stroming (bijdrage P_1) en voor een deel door straling (bijdrage P_2). Voor het totale vermogen P geldt:

$$P = P_1 + P_2.$$

Bij het berekenen van de vermogens spelen de temperatuur T van het voorwerp en de omgevingstemperatuur To een grote rol. Met name bij het berekenen van P_2 moet hiervoor de <u>absolute</u> temperatuur genomen worden. Bijvoorbeeld komt 20 ºC overeen met 20 + 273 = 293 K.

Het vermogen ten gevolge van geleiding en stroming kan bij benadering met de volgende formule berekend worden.

$$P_1 = k \cdot A \cdot (T - To).$$

In deze formule is A het oppervlak van het voorwerp en T – To het temperatuurverschil tussen het voorwerp en de omgeving. Evenredigheidsconstante k wordt de warmteoverdrachtscoëfficiënt genoemd.

Het vermogen ten gevolge van straling kan bij benadering met de volgende formule berekend worden.

$$P_2 = e \cdot \sigma \cdot A \cdot (T^4 - T_o^4).$$

De eerste term van het rechter lid ($e \cdot \sigma \cdot A \cdot T^4$) geeft het uitgestraalde vermogen weer en de tweede term ($e \cdot \sigma \cdot A \cdot T_o^4$) geeft het ingestraalde vermogen (via absorptie) weer. Het uitgestraalde vermogen is bij benadering evenredig met het oppervlak A van het voorwerp en met de vierde macht van de absolute temperatuur T^4 van het voorwerp. Verder hangt het vermogen af van de aard van het oppervlak. Met de zogenoemde emissiecoëfficiënt e wordt dit effect in rekening gebracht. De emissiecoëfficiënt ligt tussen 1 en 0. Doffe zwarte metaaloppervlakken zenden in verhouding veel (infrarode) straling uit en hebben een e van (bijna) 1. Glimmende metaaloppervlakken zenden weinig straling uit en hebben een e van (bijna) 0. De evenredigheidsconstante σ is de constante van Stefan-Boltzmann en bedraagt $5{,}67\cdot10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$. Het opgenomen vermogen ten gevolge van instraling kan op dezelfde manier berekend worden als het uitgestraalde vermogen alleen moet in plaats van de temperatuur van het voorwerp de temperatuur van de omgeving genomen worden.

In het volgende gebruiken we het programma Coach om onze natuurkundige problemen numeriek op te lossen. In plaats van Δt, ΔQ en ΔT gebruiken we dt, dQ en dT.

Opdracht 8

Een massieve koperen kubus met ribben van 1 cm wordt verwarmd tot 100 ^{o}C. Daarna koelt de kubus in lucht met een temperatuur van 20 ^{o}C af. De warmteoverdrachtscoëfficiënt hierbij bedraagt 6 W/m^2K. Koper heeft een dichtheid van 8960 kg/m^3 en een soortelijke warmte van 387 J/kgK.
Het onderstaande model berekent het temperatuurverloop van de afkoelende kubus als er géén warmtestraling zou zijn. Vul de open plekken van het model aan. Voer het model vervolgens in Coach. Maak een T-t-diagram. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht. Ga na dat het afkoelen van de kubus langer duurt als zijn ribben langer zijn. Ga ook na dat het afkoelen sneller gaat bij een grotere warmteoverdrachtscoëfficiënt.

Modelregels	Startwaarden	
P =	x = 1	‘lengte in cm
dQ =	y = 1	‘breedte in cm
T =	z = 1	‘hoogte in cm
t = t + dt	A = (2*x*y + 2*x*z + 2*y*z) / 10000	‘oppervlak in m^2
als t > tmax dan stop eindals	V = x*y*z / 1000000	‘volume in m^3
	rho = 8960	‘dichtheid koper in kg/m^3
	sw = 387	‘soort. warmte koper in J/kgK
	C =	‘warmtecapaciteit in J/K
	k = 6	‘warmteoverdr.coeff. in W/m^2K
	T = 100 ‘ºC	‘temp. blokje in ^{o}C
	To = 20 ‘ºC	‘omgevingstemp. in ^{o}C
	t = 0	‘tijd in s
	dt = 1	‘tijdstapje in s
	tmax = 1200	‘maximum tijd in s

Opdracht 9

Breid het model uit met stralingseffecten. Neem voor de emissiecoëfficiënt 1. Maak een T-t-diagram. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht. Ga na dat het afkoelen langzamer gaat bij een kleinere emissiecoëfficiënt.

Deel 3: Radioactief verval

Allereerst kijken we naar de situatie dat een radioactieve bron slechts één instabiele isotoop bevat en dat de dochterkern van deze isotoop niet vervalt (dus stabiel is). Het aantal kernen van de instabiele isotoop wordt met N aangegeven. In de volgende tekst gaan we uit van een gegeven beginwaarde van N en rekenen we na elk klein tijdstapje Δt de nieuwe N uit volgens:

$$N_{NIEUW} = N_{OUD} + \Delta N$$

Hierin is N_{NIEUW} het aantal atoomkernen na elk tijdstapje, N_{OUD} het aantal atoomkernen voor elk tijdstapje en ΔN de verandering van N gedurende elk tijdstapje. Omdat N afneemt, is ΔN steeds negatief.

Onder de activiteit A van een radioactieve bron verstaan we het aantal atoomkernen dat per tijdseenheid vervalt. In ons geval geldt dus:

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

De eerdere formule kan dan geschreven worden als:

$$N_{NIEUW} = N_{OUD} - A \cdot \Delta t$$

Als $t_{½}$ de halveringstijd van de instabiele isotoop is, kan de activiteit als volgt berekend worden.

$$A = \frac{\ln(2) \cdot N}{t_{½}}$$

In beginsel is wordt de activiteit in Bq (=bequerel) uitgedrukt. De eenheid van tijd is dan seconde. Echter, bij grote halveringstijden ligt het voor de hand om een grotere tijdseenheid te nemen, bijvoorbeeld uur of jaar. Zie de volgende opdrachten.

Nu kijken we naar de situatie dat de dochterkern van de instabiele isotoop zelf ook vervalt (dus instabiel is) en dat eventueel de kleindochter ook vervalt. Stel dat isotoop 1 vervalt tot isotoop 2 en isotoop 2 vervalt tot isotoop 3. Voor isotoop 2 geldt dan:

$$N_{2,NIEUW} = N_{2,OUD} + A_1 \cdot \Delta t - A_2 \cdot \Delta t .$$

Iets soortgelijks geldt voor de andere isotopen.

Opdracht 10
Een ouderwetse rookmelder bevatte een radioactief bronnetje met de isotoop americium-241. Deze vervalt tot neptunium-237 die in verhouding tot americium-241 stabiel is. De halveringstijd van Am-241 bedraagt 432 jaar.
Het onderstaande model berekent het verval van Am-241. Er wordt uitgegaan van een beginaantal van N van 10^7. Vul de open plekken van het model aan. Voer het model vervolgens in Coach. Maak een N-t-diagram. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

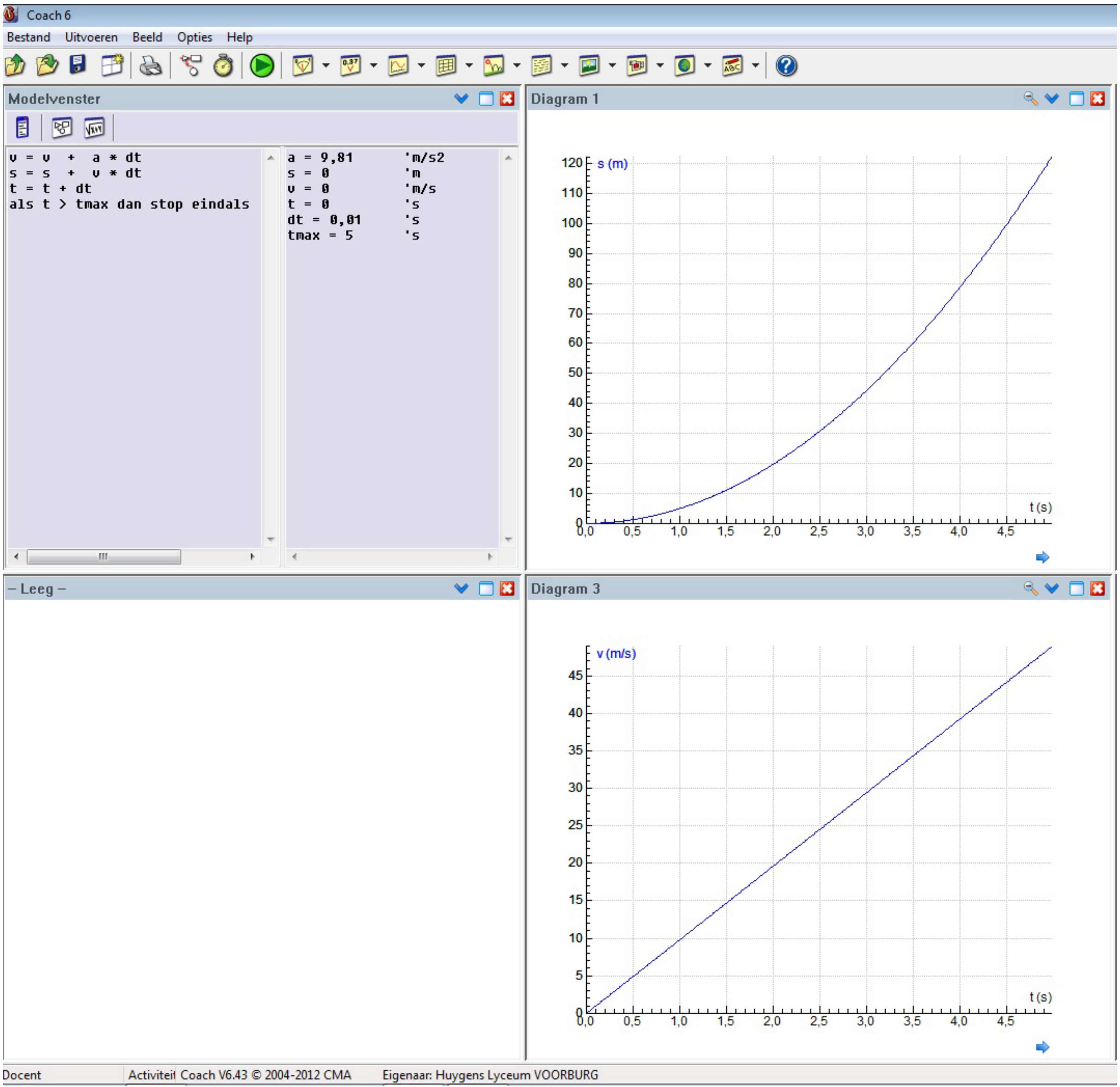
Modelregels	Startwaarden	
A =	N = 10^7	‘aantal kernen
N =	th = 432	‘halveringstijd (jaar)
t = t + dt	t = 0	‘tijd (jaar)
als t > tmax dan stop eindals	dt = 1	‘tijdstapje (jaar)
	tmax = 1200	‘maximum tijd (jaar)

Opdracht 11
Jood-135 vervalt tot xenon-135 met een halveringstijd van 6,6 uur. Op zijn beurt vervalt xenon-135 tot cesium-135 met een halveringstijd van 9,1 uur. Cesium-135 is bij benadering stabiel. Op tijdstip nul zijn er 10^7 jood-135 atomen (geen dochterkernen!).
Het onderstaande model berekent het aantal atoomkernen van iedere isotoop als functie van de tijd. Vul de open plekken van het model aan. Voer het model vervolgens in Coach. Maak een N_1-t-diagram, een N_2-t-diagram en een N_3-t-diagram. Ga na dat je iets soortgelijks krijgt als de controlefiguur van deze opdracht.

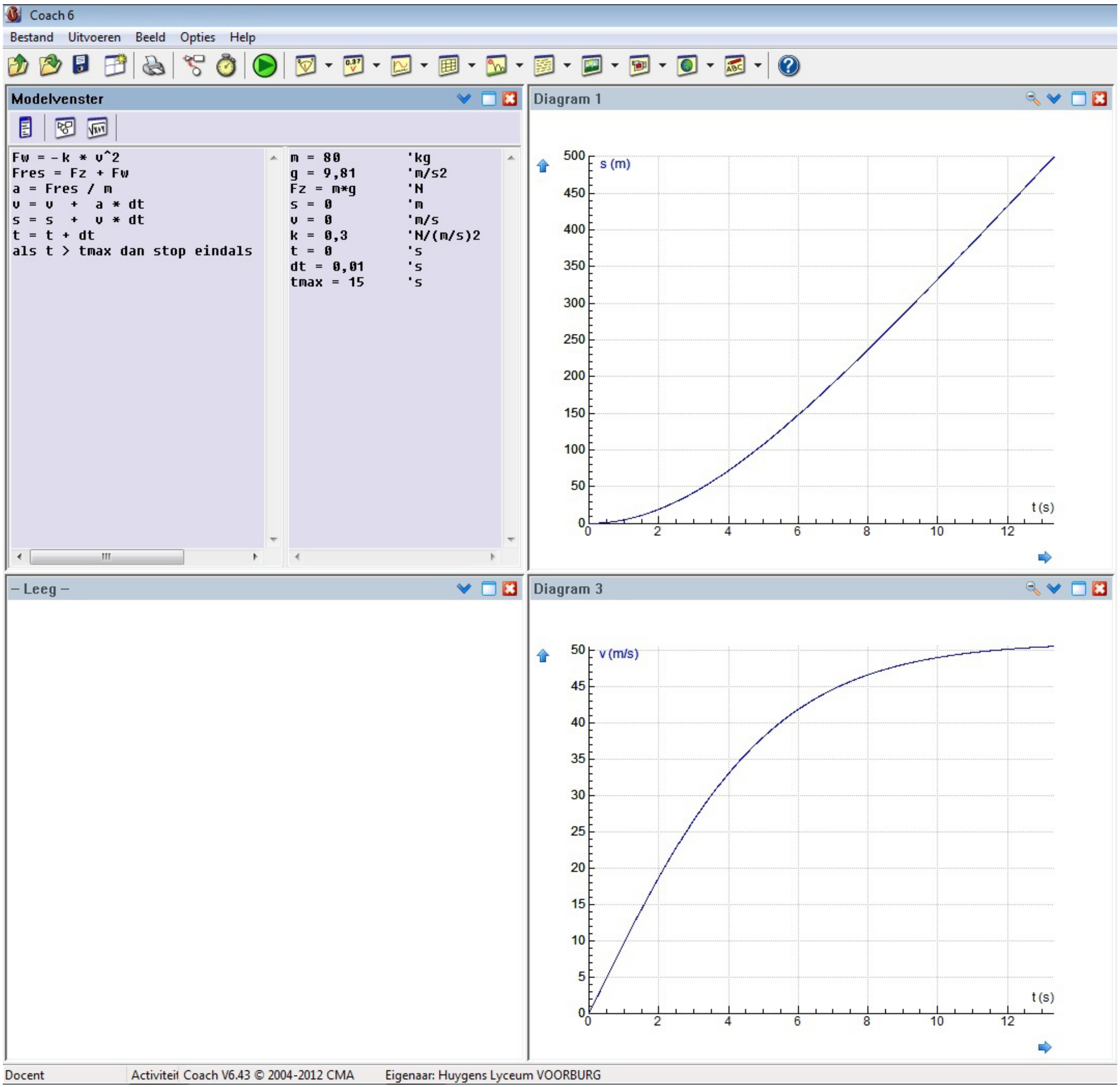
Modelregels	Startwaarden	
A1 =	N1 = 10^7	‘aantal kernen I-135
A2 =	N2 = 0	‘aantal kernen Xe-135
N1 =	N3 = 0	‘aantal kernen Cs-135
N2 =	th1 = 6,6	‘halveringstijd I-135 (uur)
N3 =	th2 = 9,1	‘halveringstijd Xe-135 (uur)
t = t + dt	t = 0	‘tijd (uur)
als t > tmax dan stop eindals	dt = 0,1	‘tijdstapje (uur)
	tmax = 60	‘maximum tijd (uur)

Figuren

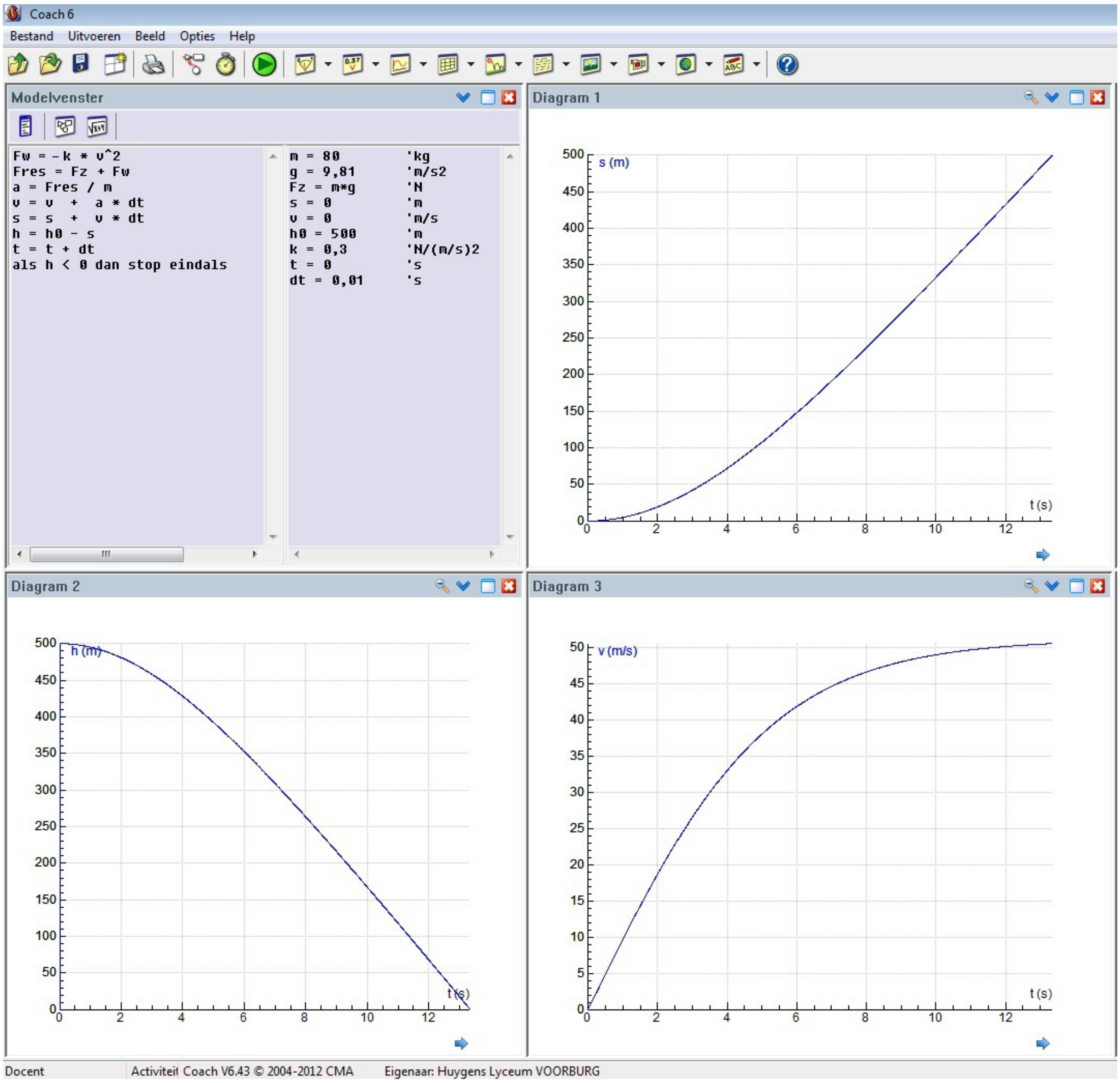
Controlefiguur van opdracht 1



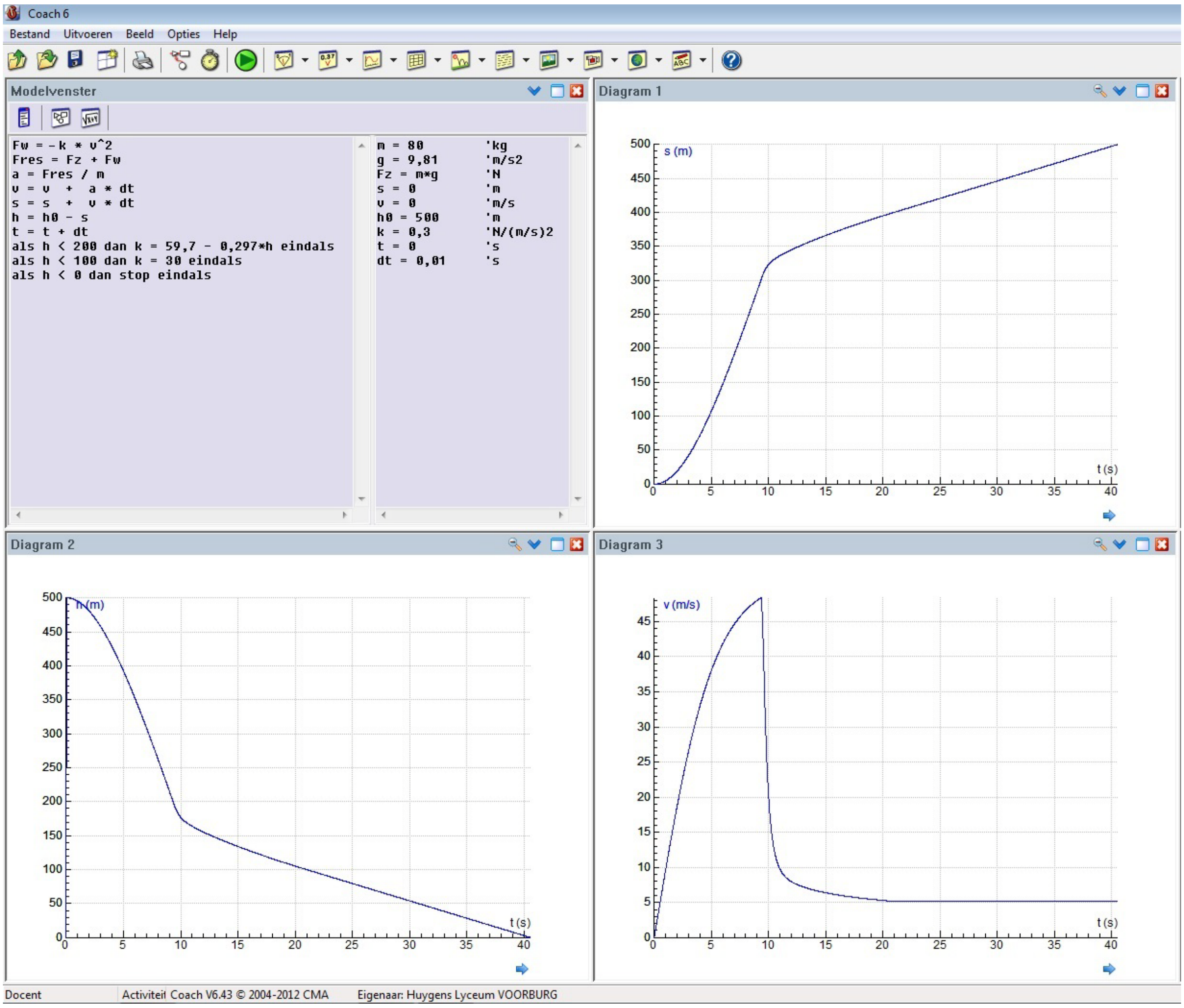
Controlefiguur van opdracht 2a



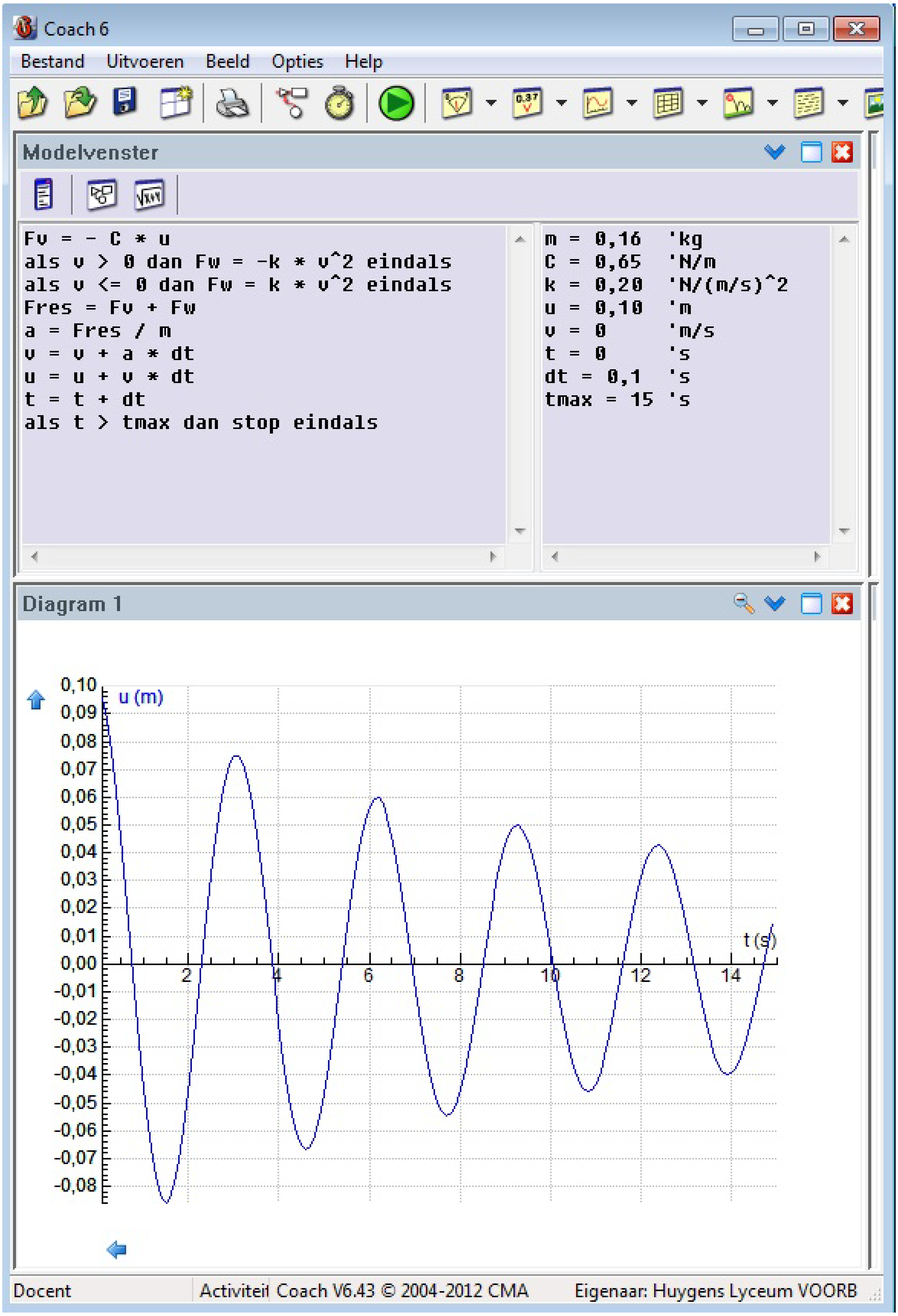
Controlefiguur van opdracht 2b



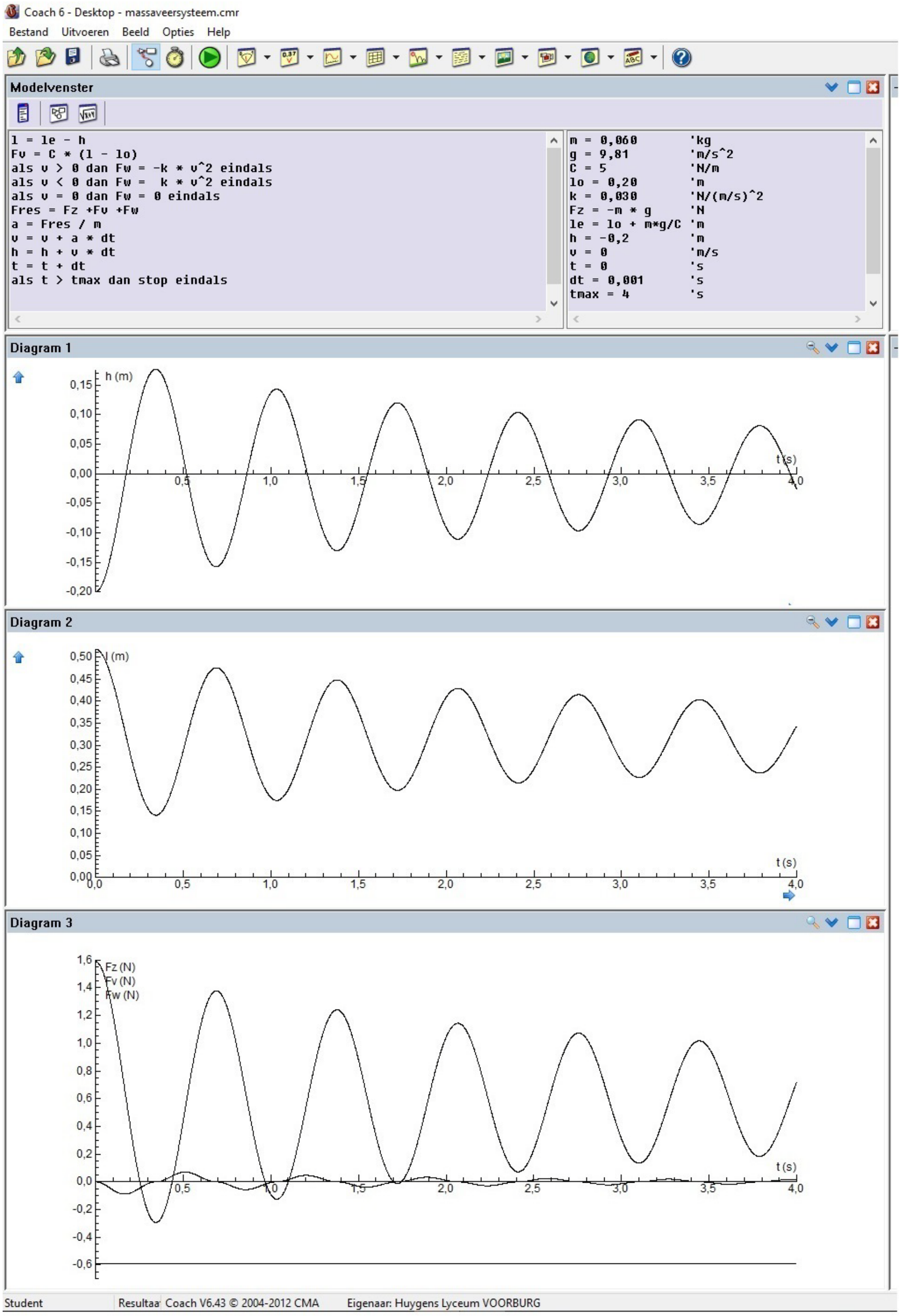
Controlefiguur van opdracht 2c



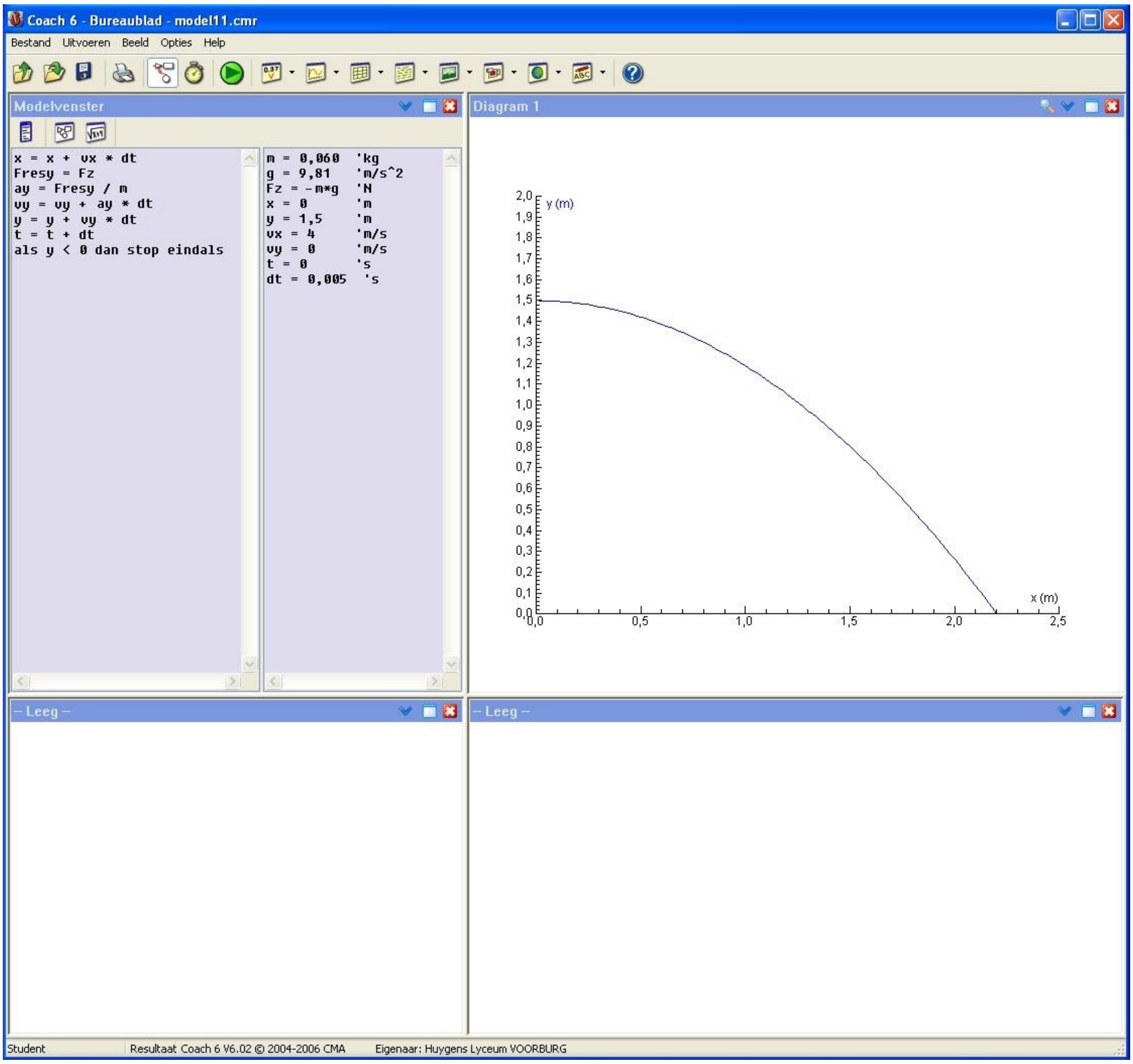
Controlefiguur van opdracht 3



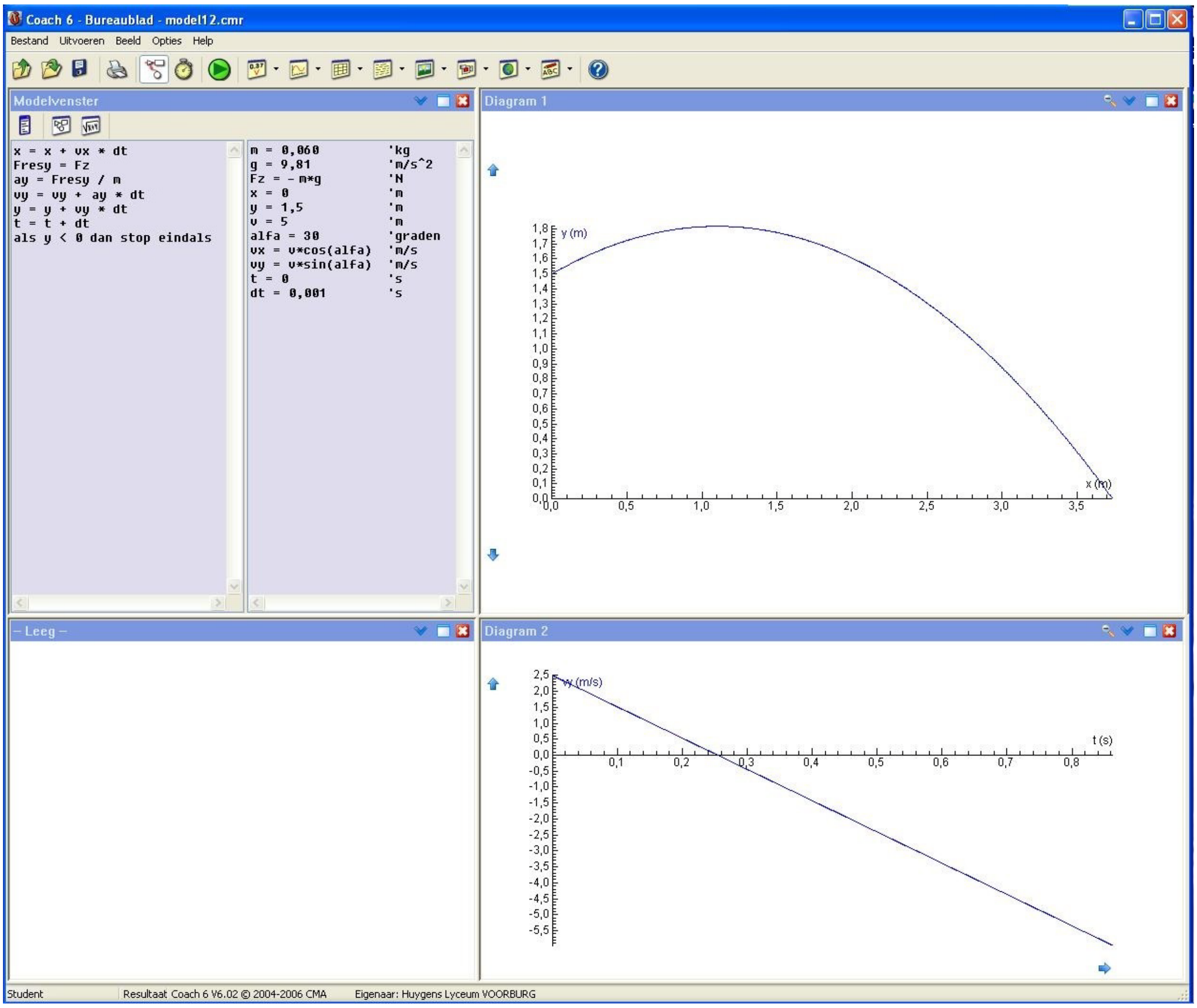
Controlefiguur van opdracht 4



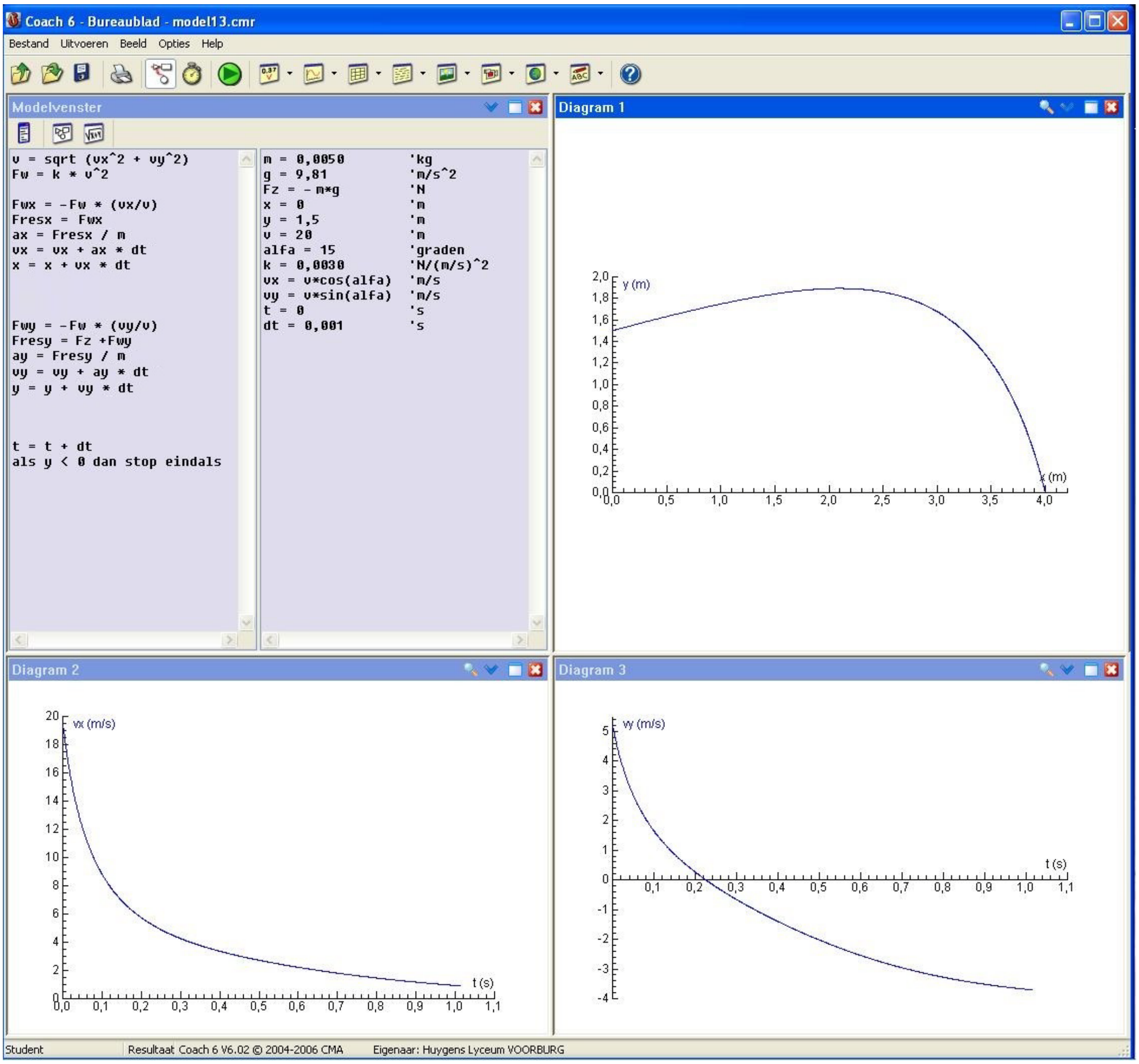
Controlefiguur van opdracht 5a



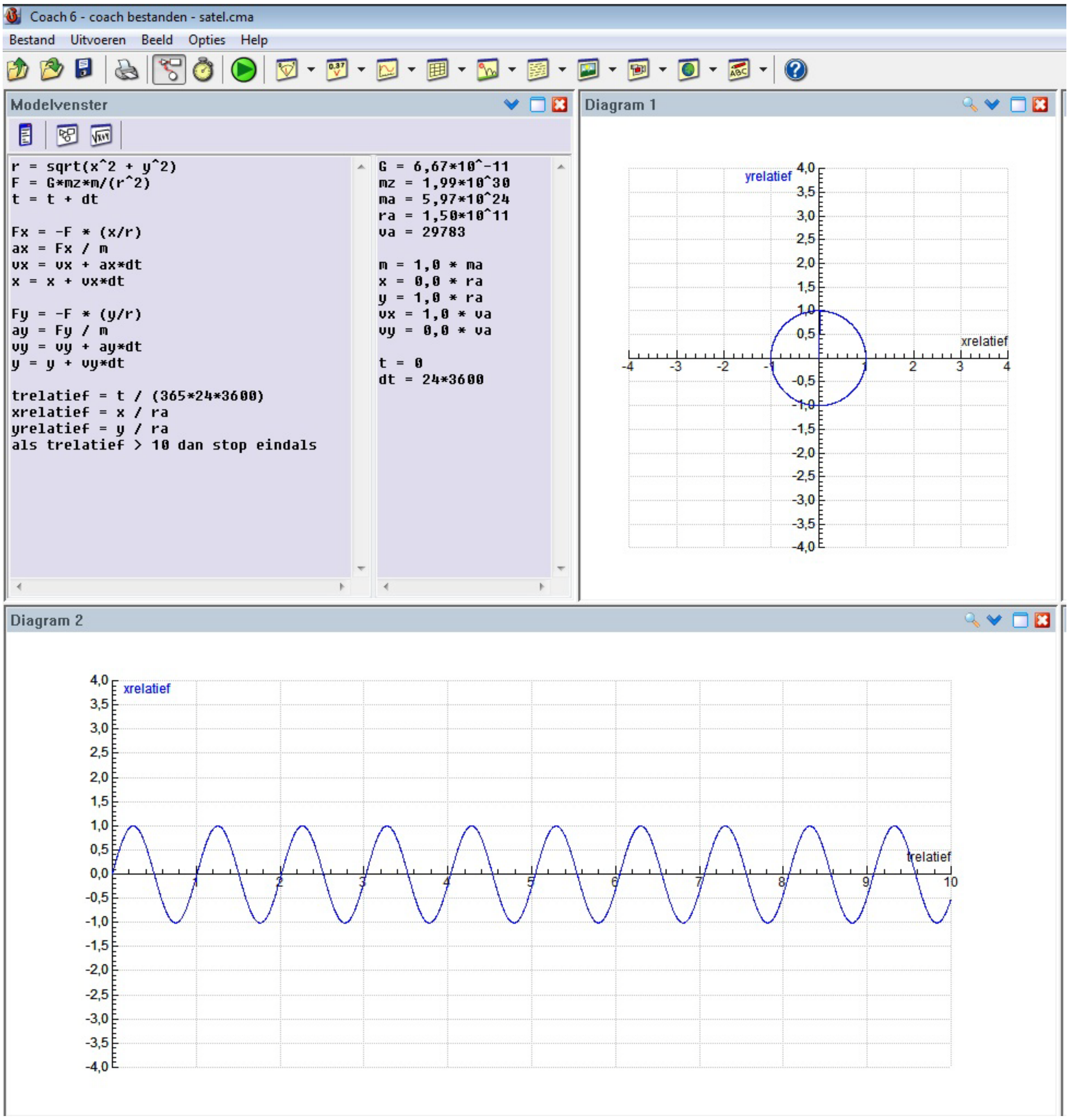
Controlefiguur van opdracht 5b



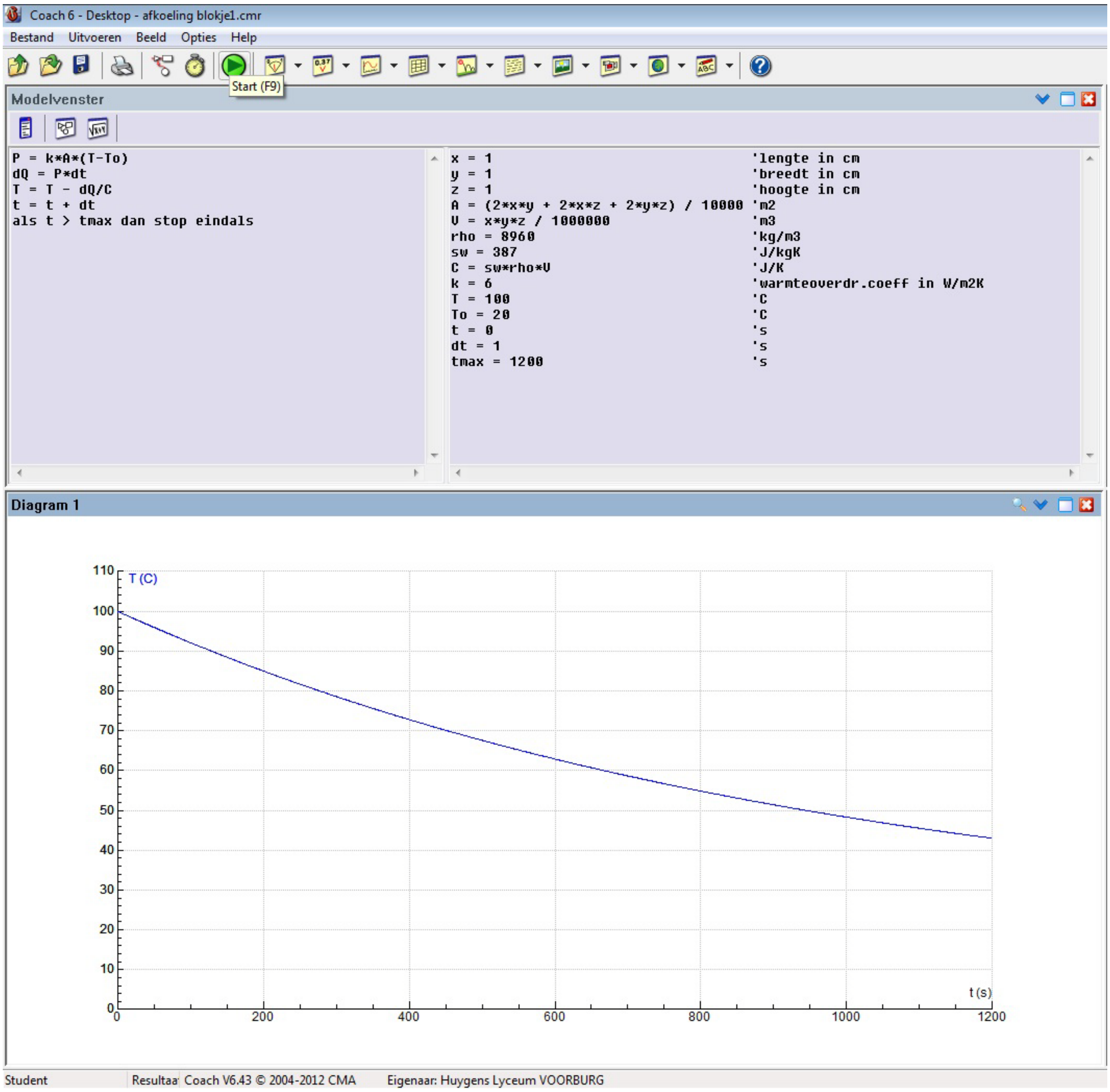
Controlefiguur van opdracht 6



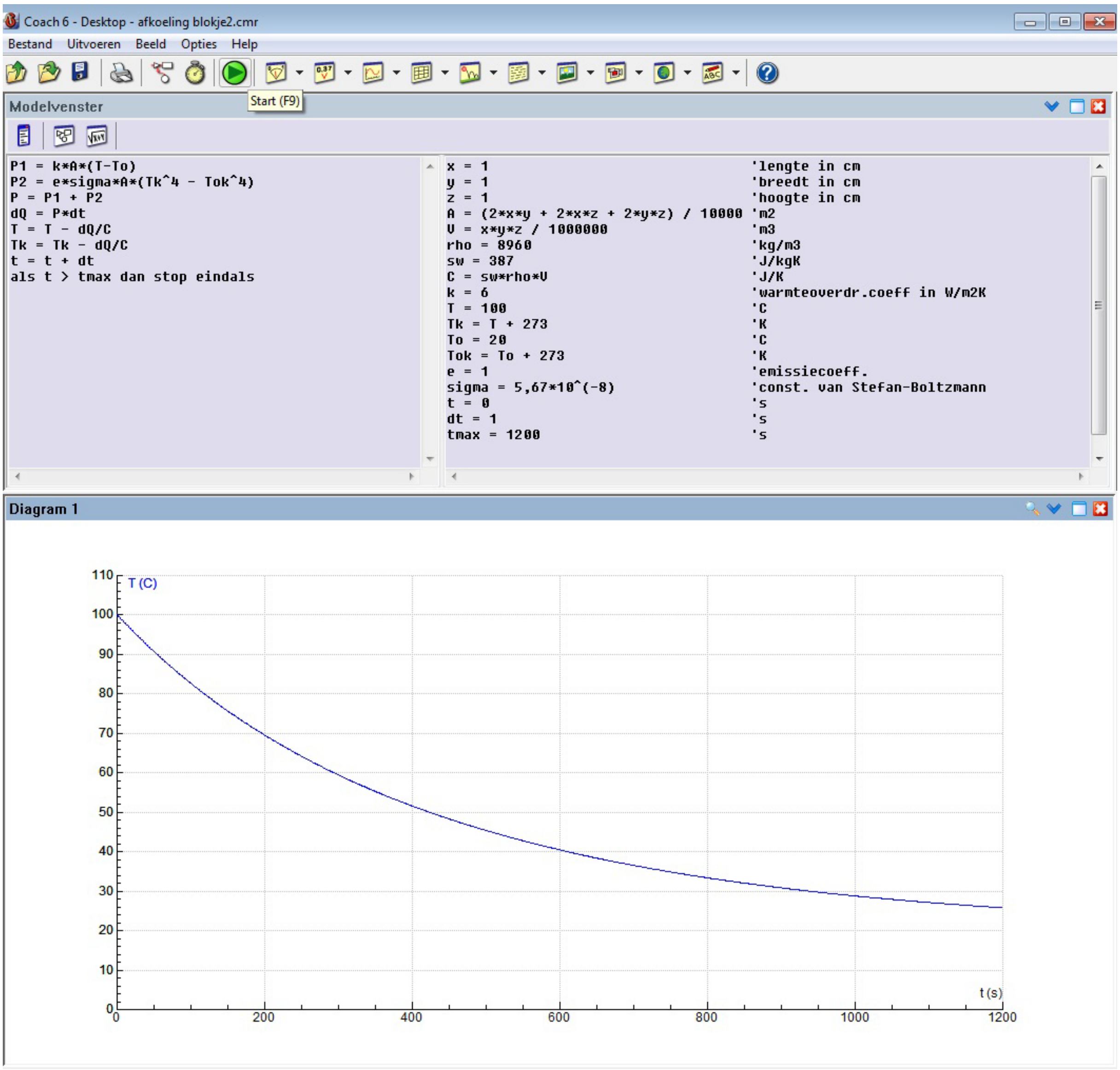
Controlefiguur van opdracht 7



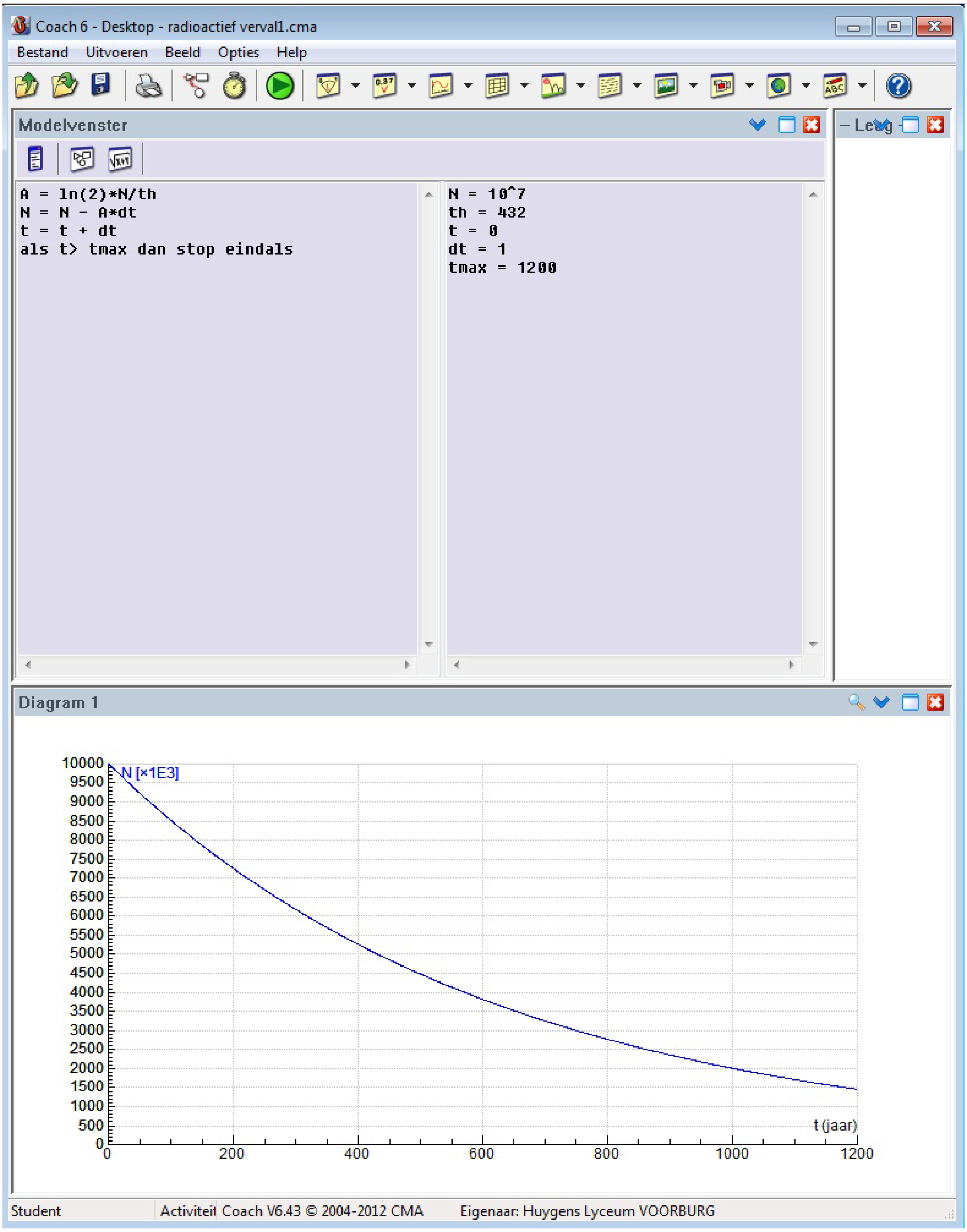
Controlefiguur van opdracht 8



Controlefiguur van opdracht 9



Controlefiguur van opdracht 10



Controlefiguur van opdracht 11